Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 2 (2013), hal 137 – 146.

PERBANDINGAN METODE *BOOTSTRAP* DAN *JACKKNIFE* DALAM MENAKSIR PARAMETER REGRESI UNTUK MENGATASI MULTIKOLINEARITAS

Ryan Iskandar, Muhlasah Novitasari Mara, Neva Satyahadewi

INTISARI

Regresi berganda merupakan suatu metode statistik yang mendeskripsikan hubungan antara variabel terikat dengan dua atau lebih variabel bebas. Penelitian ini membandingkan metode Bootstrap dan metode Jackknife dalam menaksir parameter regresi ketika terjadi multikolinearitas. Penelitian ini menggunakan 33 kondisi data berbeda yang proses simulasinya menggunakan bantuan program R. Tingkat efisiensi dari kedua metode tersebut dibandingkan melalui nilai bias dan standar deviasi dari nilai taksiran yang dihasilkan. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Bootstrap menghasilkan nilai bias dan standar deviasi lebih kecil dibandingkan metode Jackknife. Sehingga metode Bootstrap lebih efisien dalam menduga parameter regresi dibandingkan metode Jackknife ketika terjadi multikolinearitas.

Kata Kunci : *Multikolinearitas, Bootstrap, Jackknife.*

PENDAHULUAN

Istilah regresi diperkenalkan pertama kali oleh Francis Galton (1886). Galton menemukan ada kecenderungan bagi orang tua yang tinggi mempunyai anak-anak yang tinggi dan bagi orang tua yang pendek untuk mempunyai anak-anak yang pendek. Regresi adalah hubungan variabel terikat yang dipengaruhi oleh satu atau lebih dari variabel bebas. Regresi mengukur seberapa besar suatu variabel mempengaruhi variabel yang lain, sehingga dapat digunakan untuk melakukan peramalan nilai suatu variabel berdasarkan variabel lain. Variabel terikat yang dipengaruhi oleh satu variabel bebas disebut regresi linear sederhana, sedangkan variabel terikat yang dipengaruhi oleh dua atau lebih variabel bebas disebut regresi linear berganda [1].

Masalah yang sering ditemui diantara banyak masalah dalam analisis regresi linear berganda adalah adanya hubungan korelasi yang tinggi atau mendekati sempurna antar variabel bebas yang disebut dengan multikolinearitas. Efek dari multikolinearitas ini dapat mengakibatkan penduga parameter regresi yang dihasilkan dari analisis regresi linear berganda menjadi tidak efisien karena dapat menyebabkan regresi berganda mempunyai bias dan varians yang besar. Multikolinearitas juga akan menyebabkan hasil-hasil dugaan menjadi peka terhadap perubahan-perubahan kecil. Multikolinearitas juga dapat menyebabkan terjadinya perbedaan kesimpulan antara Uji Statistik F dan Uji Statistik t [1].

Ada beberapa cara untuk mengatasi masalah multikolinearitas, salah satunya adalah metode *Bootstrap* dan *Jackknife*. Metode *Bootstrap* adalah metode resampling dengan penggantian dari sampel asli untuk memperkirakan ketepatan statistik dari data dalam suatu sampel. Sedangkan *Jackknife* adalah metode resampling yang diperkenalkan oleh Quenouille untuk estimasi bias dan Tukey memperkenalkan *Jackknife* untuk menduga standar deviasi [2].

Sahinler dan Topuz telah melakukan penelitian tentang *Bootstrap* dan *Jackknife* untuk estimasi parameter regresi. Data yang digunakan adalah seratus ekor ikan yang sama spesiesnya dari studi perikanan di Universitas Mustafa Kemal (Turkey) dimana panjang sirip ikan dan panjang ekor ikan tidak saling berkorelasi sebagai variabel bebasnya yang menjelaskan variasi umur ikan. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa bias parameter, *standar error*, dan interval konfidensi *Jackknife* lebih besar dibandingkan *Bootstrap* [3].

Penelitian ini bertujuan mengkaji estimasi parameter regresi dengan metode *Bootstrap* dan *Jackknife*, dan membandingkan tingkat efisiensi dari kedua metode tersebut. Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah menggunakan data simulasi yang melibatkan tiga buah ukuran sampel 20, 50, dan 100. Tingkat korelasi yang digunakan $-0,6$, $-0,7$, $-0,8$, $-0,9$ 0, 0,1, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, dan 0,9. Parameter regresi yang digunakan adalah $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, dan $\beta_3 = 1$. Banyaknya replikasi *Bootstrap* yang digunakan $B = 200$. Data tersebut di bangkitkan menggunakan program R dengan 100 kali pengulangan.

METODE *BOOTSTRAP*

Prinsip metode *Bootstrap* ialah untuk memperkirakan parameter masing-masing sampel *Bootstrap* B buah yang merupakan sampel acak berukuran n diambil dengan pengembalian dari populasi n pengamatan. Pengamatan ke-k $(k = 1,2,3,\dots,n)$ dari sampel awal mungkin akan muncul beberapa kali pada sampel *Bootstrap* replikasi ke-r $(r = 1,2,3,\dots,B)$. Sedangkan pengamatan lain mungkin tidak akan muncul sama sekali [4]. Untuk mengestimasi parameter regresi dengan metode *Bootstrap* dapat dilakukan dengan mengambil sampel *Bootstrap* berukuran n dari data sebenarnya (Y_i, X_{ij}), $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,k-1$. Sampel *Bootstrap* yang diambil dari data sebenarnya dituliskan dalam notasi matriks sebagai berikut [5]:

$$\boldsymbol{Y}^{*r} = \begin{bmatrix} y_1^{*r} \\ y_2^{*r} \\ \vdots \\ y_n^{*r} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}^{*r} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11}^{*r} & x_{12}^{*r} & \dots & x_{1j}^{*r} \\ 1 & x_{21}^{*r} & x_{22}^{*r} & \dots & x_{2j}^{*r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1}^{*r} & x_{n2}^{*r} & \dots & x_{nj}^{*r} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*r} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{*r} \\ \varepsilon_2^{*r} \\ \vdots \\ \varepsilon_n^{*r} \end{bmatrix} \tag{1}$$

dengan $\boldsymbol{Y}^{*r}$ adalah matriks dari variabel terikat pada sampel *Bootstrap* replikasi ke-r yang berukuran $n \times 1$; $\boldsymbol{X}^{*r}$ adalah matriks variabel bebas pada sampel *Bootstrap* ke-r yang berukuran $n \times (j+1)$; $\boldsymbol{\varepsilon}^{*r}$ adalah matriks dari variabel galat acak pada sampel *Bootstrap* ke-r yang berukuran $n \times 1$.

Penduga parameter *Bootstrap* replikasi ke-r $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r})$ dapat dicari menggunakan metode kuadrat terkecil. Prinsip dari metode ini adalah meminimumkan jumlah kuadrat galat sebagai berikut [5]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{*rT}\boldsymbol{\varepsilon}^{*r} &= \left(\boldsymbol{Y}^{*r} - \boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{Y}^{*r} - \boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{Y}^{*r\boldsymbol{T}} - \left(\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right)^{\boldsymbol{T}}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{*r} - \boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{Y}^{*r^T} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r^T}\boldsymbol{X}^{*r^T}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{*r} - \boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*rT}\boldsymbol{\varepsilon}^{*r} &= \boldsymbol{Y}^{*r^T}\boldsymbol{Y}^{*r} - \boldsymbol{Y}^{*r^T}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r^T}\boldsymbol{X}^{*r^T}\boldsymbol{Y}^{*r} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r^T}\boldsymbol{X}^{*r^T}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\end{aligned} \tag{2}$$

Taksiran nilai parameter diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat, yaitu [5]:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^{*r}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^{*r}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}} = \frac{\partial\left(\boldsymbol{Y}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}} - \boldsymbol{2}\frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}} + \frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r}} = \boldsymbol{0}$$

$$-\boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \boldsymbol{2}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}$$

$$\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}$$

$$\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \left(\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \left(\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*r}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X}^{*r\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}^{*r}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*r} = \boldsymbol{X}^{*r^{-\boldsymbol{1}}}\boldsymbol{Y}^{*r} \tag{3}$$

Langkah pengambilan sampel secara random dan mengestimasi parameternya dengan Persamaan (3) diulangi terus langkahnya untuk $r = 1,2,3,\dots,B$ dimana B merupakan banyaknya replikasi *Bootstrap*. Sehingga di dapatlah parameter *Bootstrap* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{2}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{3}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{4}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{B}}$. Penduga parameter *Bootstrap*

($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$) di peroleh dengan mencari rata-rata nilai penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{r}}$ untuk $r = 1,2,3,\dots,B$ sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* = \sum_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{B}} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{r}} /\boldsymbol{B}$$

Model regresi berganda pada metode *Bootstrap* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut [3]:

$$\widehat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ adalah matriks dari variabel terikat regresi berganda pada metode *Bootstrap*; $\boldsymbol{X}$ adalah matriks dari variabel bebas; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ adalah penduga dari metode *Bootstrap*; $\boldsymbol{\varepsilon}$ galat acak.

Setelah mendapatkan parameter *Bootstrap* selanjutnya akan dihitung tingkat akurasi parameter yang diperoleh dengan menggunakan bias dan standar deviasi dari *Bootstrap*, yaitu [2]:

$$\boldsymbol{Bias}^* = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - \widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

dengan $Bias^*$ adalah bias dari *Bootstrap*; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga sebenarnya. Sedangkan varians dari *Bootstrap* dapat dihitung dengan [2]:

$$\boldsymbol{var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \sum_{r=1}^{B} \left[(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{r}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*)(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\boldsymbol{r}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*)' \right] \Big/ (B-1), \qquad r = 1,2,\dots,B$$

dimana $var(\hat{\beta}^*)$ adalah varians dari *Bootstrap*. Sehingga untuk standar deviasi *Bootstrap* sebagai berikut:

$$\boldsymbol{SD}^* = \left(var(\hat{\beta}^*) \right)^{1/2}$$

dimana SD^* adalah standar deviasi *Bootstrap*.

METODE *JACKKNIFE*

Prinsip metode *Jackknife* ialah menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel yang ada. Untuk mengestimasi parameter regresi dengan menggunakan prosedur *Jackknife* menghilangkan satu buah data dapat dilakukan dengan prosedur sebagai berikut [2]:

mengambil sampel berukuran n secara random dimana

$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} \end{bmatrix}$ merupakan sampel yang sebenarnya dari data observasi.

Selanjutnya pada prosedur *Jackknife* yaitu menghilangkan satu baris dari vektor, untuk *Jackknife* baris ke-1 yaitu menghilangan baris pertama dari vektor sehingga [2]:

$$\boldsymbol{Y}^{**\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{X}^{**\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} \end{bmatrix}$$

Data yang sudah dihilangkan barisnya dari vektor disebut data *Jackknife*. Data *Jackknife* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut [2]:

$$\boldsymbol{Y}^{**\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} y_1^{**i} \\ y_2^{**i} \\ \vdots \\ y_{n-1}^{**i} \end{bmatrix}; \boldsymbol{X}^{**\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11}^{**i} & x_{12}^{**i} & \cdots & x_{1j}^{**i} \\ 1 & x_{21}^{**i} & x_{22}^{**i} & \cdots & x_{2j}^{**i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{(n-1)1}^{**i} & x_{(n-1)2}^{**i} & \cdots & x_{(n-1)j}^{**i} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{**\boldsymbol{i}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{**i} \\ \varepsilon_2^{**i} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{**i} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

dimana $\boldsymbol{Y}^{**\boldsymbol{i}}$ adalah matriks dari variabel terikat data yang sudah dihilangkan baris ke-$\boldsymbol{i}$ yang berukuran $(n-1) \times 1$; $\boldsymbol{X}^{**\boldsymbol{i}}$ adalah matriks dari variabel bebas data yang sudah dihilangkan baris ke-i

yang berukuran $(n-1)\times(j+1)$; $\boldsymbol{\varepsilon}^{**i}$ adalah matriks dari variabel galat acak data yang sudah dihilangkan baris ke-i yang berukuran $(n-1)\times 1$.

Penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}$ dicari menggunakan metode kuadrat terkecil. Prinsip dari metode ini adalah untuk meminimumkan jumlah kuadrat galat sebagai berikut [5]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{**iT}\boldsymbol{\varepsilon}^{**i} &= \left(\boldsymbol{Y}^{**i}-\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)^{T}\left(\boldsymbol{Y}^{**i}-\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)\\ &= \left(\boldsymbol{Y}^{**iT}-\left(\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)^{T}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{**i}-\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)\\ &= \left(\boldsymbol{Y}^{**i^{T}}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i^{T}}\boldsymbol{X}^{**i^{T}}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{**i}-\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{**iT}\boldsymbol{\varepsilon}^{**i} = \boldsymbol{Y}^{**i^{T}}\boldsymbol{Y}^{**i}-\boldsymbol{Y}^{**i^{T}}\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i^{T}}\boldsymbol{X}^{**i^{T}}\boldsymbol{Y}^{**i}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i^{T}}\boldsymbol{X}^{**i^{T}}\boldsymbol{X}^{**i} \quad (5)$$

Taksiran nilai parameter diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat, yaitu [5]:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{**iT}\boldsymbol{\varepsilon}^{**i}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{**iT}\boldsymbol{\varepsilon}^{**i}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}}=\frac{\partial\left(\boldsymbol{Y}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}}-\mathbf{2}\frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}}+\frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}}=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}-\mathbf{2}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}+\mathbf{2}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{2}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\mathbf{2}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}\\ \boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}\\ \boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\left(\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{Y}^{**i}\\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\left(\boldsymbol{X}^{**iT}\boldsymbol{X}^{**i}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{**i^{T}}\boldsymbol{Y}^{**i}\\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}&=\boldsymbol{X}^{**i^{-\mathbf{1}}}\boldsymbol{Y}^{**i}\end{aligned} \quad (6)$$

Selanjutnya diulangi langkah pengambilan sampel yang sebenarnya seperti pada Persamaan (4). Baris kedua kemudian dihilangkan dan diestimasi parameternya dengan Persamaan (6). secara analog diterapkan pada baris ketiga sampai baris ke-n. Sehingga diperoleh parameter *Jackknife* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\mathbf{1}},\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\mathbf{2}},\ldots,\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\boldsymbol{n}}$. Penduga parameter *Jackknife* ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}$) diperoleh dengan mencari rata-rata nilai dari setiap penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\mathbf{1}},\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\mathbf{2}},\ldots,\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\boldsymbol{n}}$ sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}=\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\boldsymbol{i}}/n$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}$ adalah penduga dari metode *Jackknife*; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}$ adalah penduga ke-i dari *Jackknife*; n adalah banyaknya data *Jackknife*.

Model persamaan regresi berganda *Jackknife* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut [3]:

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ adalah matriks dari variabel terikat regresi berganda pada metode *Jackknife*; $\boldsymbol{X}$ adalah matriks dari variabel bebas; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}$ adalah penduga dari metode *Jackknife*; $\boldsymbol{\varepsilon}$ galat acak.

Selanjutnya dihitung tingkat akurasi estimasi parameter yang diperoleh dengan menggunakan bias dan standar deviasi. Karena *Jackknife* menghapus data satu maka bias dari *Jackknife* adalah [1]

$$\boldsymbol{Bias}^{**}=(n-1)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dalam hal ini $Bias^{**}$ adalah Bias dari *Jackknife*; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga sebenarnya; n adalah banyaknya data *Jackknife*. Adapun varians dari *Jackknife* dapat dihitung sebagai berikut:

$$\boldsymbol{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}\right)=(n-1).\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}_{\widehat{\beta}^{**}}$$

$$\boldsymbol{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}\right)=\frac{(n-1)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**i}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**}\right)'\right]$$

dengan $var(\hat{\beta}^{**})$ adalah varians dari *Jackknife*. Sehingga standar deviasi *Jackknife* adalah

$$\boldsymbol{SD}^{**} = \left(\boldsymbol{var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**})\right)^{1/2}$$

dengan SD^{**} adalah standar deviasi *Jackknife*.

Dari proses simulasi dengan bantuan program R untuk setiap kondisi data diulang sebanyak 100 kali, sehingga diperoleh 100 nilai dugaan bagi masing-masing metode untuk setiap data. Perbandingan tingkat efisiensi dari kedua metode *Bootstrap* dan *Jackknife* dapat dilihat berdasarkan nilai bias dan standar deviasi. Nilai bias merupakan suatu ukuran penyimpangan dari nilai dugaan yang diperoleh dengan nilai dugaan yang sebenarnya. Nilai bias ini berguna untuk melihat tingkat ketepatan dari penduga. Standar deviasi berguna untuk mengetahui besar kecilnya tingkat kesalahan yang terjadi dalam penelitian.

Berikut ini merupakan hasil bias dan standar deviasi dari metode *Bootstrap* dan *Jackknife* yang disajikan dalam bentuk Tabel 1 dan 2.

Tabel 1. Nilai Bias Setiap Parameter Penduga dengan Metode *Bootstrap* dan Metode *Jackknife*

Koefisien Korelasi (ρ)	Ukuran Data (n)	Nilai Bias							
		Metode *Bootstrap*				Metode *Jackknife*			
		β_0	β_1	β_2	β_3	β_0	β_1	β_2	β_3
$\rho = 0$	$n = 20$	0.00085131	-0.511152	-0.502290	-0.510037	0.0337965	0.249580	1.917156	0.325926
$\rho = 0.1$	$n = 20$	0.000099	-0.476910	-0.487605	-0.484632	-0.0275815	0.382757	-0.902256	3.528423
$\rho = 0.5$	$n = 20$	-0.000701	-0.404491	-0.387662	-0.385945	-0.0231325	2.209683	-1.943441	-0.618166
$\rho = -0.6$	$n = 20$	-0.0001178	-0.570328	-0.77364	-0.813389	0.0084180	3.176844	1.135807	-1.967751
$\rho = -0.7$	$n = 20$	-0.0006754	-0.559759	-0.738133	-0.854282	-0.0205735	-3.409492	0.05522578	2.399403
$\rho = -0.8$	$n = 20$	0.00040829	-0.529668	-0.823696	-0.959752	0.0347199	-4.464682	-5.696392	-3.740344
$\rho = -0.9$	$n = 20$	0.00059185	-0.529126	-0.879318	-1.080908	0.0147936	-0.4641078	0.9581576	-3.38132
$\rho = 0.6$	$n = 20$	0.00031456	-0.393422	-0.359363	-0.384287	0.0167184	-5.82639	6.369535	-3.479763
$\rho = 0.7$	$n = 20$	-0.0004634	-0.366251	-0.345335	-0.359596	-0.0269121	-2.919412	4.871352	4.063788
$\rho = 0.8$	$n = 20$	0.00062899	-0.328298	-0.348769	-0.354709	0.0411765	1.172215	-2.897375	0.7644903
$\rho = 0.9$	$n = 20$	-0.0002118	-0.323470	-0.357312	-0.310428	0.0191845	0.635911	2.483101	3.030497
$\rho = 0$	$n = 50$	0.00018136	-0.493959	-0.500769	-0.509231	-0.0028032	5.349468	-0.7876906	-3.798074
$\rho = 0.1$	$n = 50$	0.00015274	-0.482359	-0.472152	-0.467049	-0.0077458	-1.493768	3.890889	4.173192
$\rho = 0.5$	$n = 50$	0.00019397	-0.402781	-0.385436	-0.399458	0.0014465	0.2343195	-0.6021185	-2.210483
$\rho = -0.6$	$n = 50$	-0.0000252	-0.550432	-0.715472	-0.782152	-0.0148869	-9.964966	-3.560038	1.941258
$\rho = -0.7$	$n = 50$	0.00008295	-0.560149	-0.772286	-0.869494	0.0128417	-0.3380661	-6.560826	-3.374986
$\rho = -0.8$	$n = 50$	-0.0002448	-0.561205	-0.833821	-0.949969	-0.0004786	-6.008195	2.279889	-0.7196027
$\rho = -0.9$	$n = 50$	0.00004787	-0.510016	-0.815111	-1.020393	-0.0173202	-10.40621	-3.406063	3.259438
$\rho = 0.6$	$n = 50$	-0.0000199	-0.371396	-0.376354	-0.373315	-0.0139990	-0.4333998	-5.259119	3.074425
$\rho = 0.7$	$n = 50$	0.00018273	-0.362814	-0.359488	-0.357456	0.0142045	2.926715	-3.393636	0.6157646
$\rho = 0.8$	$n = 50$	-0.0001156	-0.341082	-0.355279	-0.336808	-0.0071174	-4.276289	0.7351386	4.315874
$\rho = 0.9$	$n = 50$	-0.0001858	-0.317750	-0.351984	-0.317444	0.0037748	-3.831850	-0.0820970	3.854973
$\rho = 0$	$n = 100$	-0.0008519	-0.496647	-0.508163	-0.504556	0.0020238	7.040056	-2.384255	2.121743
$\rho = 0.1$	$n = 100$	0.00013592	-0.469019	-0.474980	-0.47991	-0.0031087	4.433617	2.872316	8.551498
$\rho = 0.5$	$n = 100$	0.00000528	-0.385944	-0.395573	-0.398012	-0.0036123	0.6394104	-0.2841619	-3.109883
$\rho = -0.6$	$n = 100$	0.00000824	-0.563592	-0.726579	-0.794982	0.0006177	3.578862	0.03694596	-1.649707
$\rho = -0.7$	$n = 100$	-0.0000376	-0.559725	-0.778347	-0.860208	0.0012866	2.44866	-17.24718	-8.555969
$\rho = -0.8$	$n = 100$	-0.0000663	-0.540889	-0.823412	-0.953622	-0.0018008	-0.4575966	-1.897026	5.230628
$\rho = -0.9$	$n = 100$	0.00010719	-0.521913	-0.841003	-1.036984	-0.0007859	-0.0868653	-0.1417364	-12.89862
$\rho = 0.6$	$n = 100$	0.00008899	-0.378789	-0.368356	-0.377405	-0.0000575	-3.717285	8.719637	-8.709369
$\rho = 0.7$	$n = 100$	-0.0000179	-0.354006	-0.362782	-0.360889	0.0039089	6.078091	-3.448494	-3.818332
$\rho = 0.8$	$n = 100$	-0.0000111	-0.340735	-0.349028	-0.338376	-0.0054194	3.277022	-8.67754	8.235537
$\rho = 0.9$	$n = 100$	0.0000883	-0.335775	-0.316692	-0.335863	-0.0004204	-1.673611	16.02838	-15.18759

Tabel 2. Nilai Standar Deviasi Parameter Penduga dengan Metode *Bootstrap* dan Metode *Jackknife*

Koefisien Korelasi (ρ)	**Ukuran Data** (n)	**Standar Deviasi**							
		Metode *Bootstrap*				**Metode *Jackknife***			
		β_0	β_1	β_2	β_3	β_0	β_1	β_2	β_3
$\rho = 0$	$n = 20$	0.00570771	0.0249904	0.02815627	0.02354096	0.04515587	0.2725237	0.5238609	0.3285581
$\rho = 0.1$	$n = 20$	0.00508024	0.02675146	0.02594037	0.02582094	0.03810022	0.3838986	0.2683065	0.2002133
$\rho = 0.5$	$n = 20$	0.005443216	0.02405369	0.02629956	0.02613726	0.03030138	0.4459597	0.1242901	0.2191674
$\rho = -0.6$	$n = 20$	0.005353982	0.02583691	0.02661964	0.02831989	0.02763107	0.2728607	0.6719007	0.217873
$\rho = -0.7$	$n = 20$	0.005613749	0.02469244	0.02476791	0.02442675	0.03565068	0.4006689	0.5285215	0.290927
$\rho = -0.8$	$n = 20$	0.005407498	0.02729475	0.02645506	0.02496364	0.0431943	0.2911144	0.225769	0.6407113
$\rho = -0.9$	$n = 20$	0.005558261	0.02581257	0.02589463	0.02485968	0.05545693	0.3008505	0.2596411	0.2273482
$\rho = 0.6$	$n = 20$	0.00558733	0.02472192	0.0257127	0.02399332	0.04185273	0.1193393	0.184625	0.6266771
$\rho = 0.7$	$n = 20$	0.005348125	0.02344952	0.02495215	0.02425505	0.03490641	0.3494784	0.3957143	0.373949
$\rho = 0.8$	$n = 20$	0.005352485	0.02755245	0.02471701	0.02527635	0.01905256	0.1544028	0.2903485	0.4524509
$\rho = 0.9$	$n = 20$	0.005837434	0.02475412	0.026308	0.0268515	0.02365281	0.1966845	0.4309035	0.2041338
$\rho = 0$	$n = 50$	0.002068814	0.01474278	0.01628241	0.01574744	0.00921927	0.1350024	0.1055823	0.2766436
$\rho = 0.1$	$n = 50$	0.002020278	0.01499368	0.01488573	0.01505884	0.0128393	0.2081009	0.2064733	0.2168363
$\rho = 0.5$	$n = 50$	0.002080839	0.01349339	0.01616599	0.01365634	0.00681670	0.1585704	0.3132287	0.2293197
$\rho = -0.6$	$n = 50$	0.001989011	0.01370616	0.01527855	0.01505533	0.01450978	0.1585922	0.3180727	0.4304529
$\rho = -0.7$	$n = 50$	0.00201114	0.01409449	0.01335738	0.01450821	0.01194053	0.212404	0.3542691	0.3209155
$\rho = -0.8$	$n = 50$	0.002071237	0.01336834	0.01582102	0.01565944	0.0109672	0.1534214	0.4071622	0.314561
$\rho = -0.9$	$n = 50$	0.002035161	0.01430066	0.01567539	0.01469836	0.02655038	0.4041744	0.391501	0.6997561
$\rho = 0.6$	$n = 50$	0.002029683	0.01317905	0.01513155	0.01520138	0.02111469	0.1476606	0.3894018	0.7283275
$\rho = 0.7$	$n = 50$	0.002113981	0.01426949	0.01457293	0.01444334	0.01051581	0.1623815	0.2420454	0.688948
$\rho = 0.8$	$n = 50$	0.002066715	0.01431255	0.01554673	0.01477653	0.02592742	0.4525857	0.6225628	0.9872313
$\rho = 0.9$	$n = 50$	0.002014511	0.01638531	0.01553264	0.01448189	0.00781550	0.278294	0.6088075	0.4461075
$\rho = 0$	$n = 100$	0.00102143	0.01026767	0.00938209	0.01054399	0.00542354	0.448357	0.2171432	0.4457836
$\rho = 0.1$	$n = 100$	0.001022571	0.00964803	0.00963961	0.01081795	0.00543440	0.0882311	0.1617111	0.3392544
$\rho = 0.5$	$n = 100$	0.001039222	0.00958370	0.01025164	0.00930828	0.00499822	0.111493	0.1424794	0.3388364
$\rho = -0.6$	$n = 100$	0.001026135	0.01053819	0.01065365	0.00996845	0.004953612	0.1483159	0.2639894	0.288629
$\rho = -0.7$	$n = 100$	0.001011788	0.00978942	0.01077181	0.01080472	0.00513019	0.1623366	0.105699	0.296178
$\rho = -0.8$	$n = 100$	0.001053902	0.00905419	0.01035933	0.00978348	0.007254948	0.06628962	0.2562395	0.4188044
$\rho = -0.9$	$n = 100$	0.000988981	0.0097708	0.01049984	0.01064208	0.006578597	0.2333758	0.4401215	0.6900753
$\rho = 0.6$	$n = 100$	0.000966248	0.00992592	0.008949471	0.01044367	0.00545469	0.1541942	0.3454875	0.6928017
$\rho = 0.7$	$n = 100$	0.00099006	0.01072745	0.01030701	0.00994898	0.005854493	0.106614	0.7369836	0.9620007
$\rho = 0.8$	$n = 100$	0.001078882	0.01064767	0.01006034	0.01073084	0.008682061	0.8675873	0.3529028	0.4627483
$\rho = 0.9$	$n = 100$	0.001029318	0.01098502	0.0107696	0.01008183	0.003924748	0.1427063	0.2295192	0.2218789

Dalam Tabel 1 terlihat bahwa untuk $n = 20$ dengan $\rho = 0;\ -0{,}6;\ -0{,}8;\ -0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}8;$ dan $0{,}9$ bias β_0 yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*, untuk $n = 50$ dan $n = 100$ bias β_0 yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* hanya di $\rho = 0{,}5;\ -0{,}7;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ dan $\rho = 0;\ -0{,}6; -0{,}7;\ 0{,}7$. Sehingga secara keseluruhan bias β_0 yang dihasilkan dalam Tabel 1 metode *Jackknife* lebih kecil daripada metode *Bootstrap*. Bias β_1 dalam Tabel 1 yang dihasilkan oleh $n = 20$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}5; -0{,}6;\ -0{,}9;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$ dan $n = 50$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}5;\ -0{,}7;\ 0{,}7$ serta $n = 100$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}5; -0{,}6;\ -0{,}7; -0{,}8; -0{,}9;\ 0{,}7$ dan $0{,}8$ menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Sehingga secara keseluruhan untuk bias β_1 yang dihasilkan dalam Tabel 1 metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Bias β_2 dalam Tabel 1 terlihat bahwa untuk $n = 50$ dengan $\rho = 0{,}1;\ -0{,}8;\ 0{,}8;\ 0{,}9$ bias β_2 yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*, untuk $n = 20$ dengan $\rho = 0;\ -0{,}6; -0{,}7;\ -0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ dan $n = 100$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}5; -0{,}6;\ -0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}9$ terlihat bahwa bias β_2 yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Sehingga secara keseluruhan untuk bias β_2 yang dihasilkan dalam Tabel 1 metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Bias β_3 dalam Tabel 1 yang dihasilkan oleh $n = 20$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}1; -0{,}7;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$ dan $n = 50$ dengan $\rho = 0{,}1; -0{,}6;\ -0{,}8;\ -0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$ serta $n = 100$ dengan $\rho = 0;\ 0{,}1; -0{,}8;\ 0{,}8$ menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Secara keseluruhan untuk bias β_3 yang dihasilkan dalam Tabel 1 metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Dari hasil $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa penduga yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife*. Bias pada metode *Bootstrap* mengecil ketika korelasi antara variabel-variabel bebas besar dan bias akan membesar ketika korelasi antara variabel-variabel bebas kecil. Dilain pihak, secara keseluruhan bias metode *Jackknife* yang dihasilkan tidak bergantung pada besar kecilnya koefisien korelasi.

Dalam Tabel 2 terlihat bahwa kedua metode penduga menghasilkan nilai standar deviasi yang kecil. Pada metode *Bootstrap* nilai standar deviasi membesar ketika koefisien korelasinya besar dan pada saat korelasinya kecil nilai standar deviasi juga kecil. Sedangkan nilai standar deviasi yang dihasilkan metode *Jackknife* tidak tergantung pada besar kecilnya koefisien korelasi. Nilai standar deviasi yang dihasilkan oleh metode *Bootstrap* cenderung lebih kecil dibandingkan nilai standar deviasi yang dihasilkan metode *Jackknife* hal ini terlihat dari nilai standar deviasi $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 untuk $n = 20, 50$ dan 100 dengan $\rho = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}5;\ -0{,}6; -0{,}7; -0{,}8; -0{,}9;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8,$ dan $0{,}9$ yang dihasilkan dalam Tabel 2.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa secara keseluruhan metode *Bootstrap* menghasilkan nilai bias penduga yang lebih kecil daripada metode *Jackknife* dalam menduga koefisien regresi ketika terjadi multikolinearitas. Metode *Jackknife* menghasilkan nilai standar deviasi yang lebih besar dibandingkan dengan metode *Bootstrap*. Hal ini berarti bahwa metode *Jackknife* menghasilkan tingkat kesalahan yang besar dibandingkan metode *Bootstrap* dalam menduga koefisien regresi ketika terjadi multikolinearitas.

Untuk mengetahui metode mana yang paling efisien antara metode *Bootstrap* dengan metode *Jackknife* dapat dihitung dengan cara mengurangi bias metode *Bootstrap* dengan bias metode *Jackknife* dan standar deviasi metode *Bootstrap* dengan standar deviasi metode *Jackknife*. Jika hasil pengurangan bias dan standar deviasi metode Bootsrap dan *Jackknife* bernilai negatif maka metode *Bootstrap* yang efisien tetapi jika hasilnya bernilai positif maka metode *Jackknife* yang efisien. Berikut ini merupakan hasil pengurangan antara bias metode *Bootstrap* dengan bias metode *Jackknife* dan hasil pengurangan antara standar deviasi *Bootstrap* dengan standar deviasi *Jackknife* yang disajikan dalam bentuk Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Efisiensi Bias dan Standar Deviasi Setiap Parameter Penduga

Koefisien Korelasi (ρ)	Ukuran Data (n)	Nilai Efisiensi							
		Bias				Standar deviasi			
		β_0	β_1	β_2	β_3	β_0	β_1	β_2	β_3
$\rho = 0$	$n = 20$	-0.03294519	-0.7607320	-2.4194460	-0.835963	-0.039448160	-0.24753330	-0.49570463	-0.3050171
$\rho = 0.1$	$n = 20$	0.02768050	-0.8596670	0.4146510	-4.013055	-0.033019980	-0.35714714	-0.24236613	-0.1743924
$\rho = 0.5$	$n = 20$	0.02243150	-2.6141740	1.5557790	0.232221	-0.024858164	-0.42190601	-0.09799054	-0.1930301
$\rho = -0.6$	$n = 20$	-0.0085360	-3.7471719	-1.909448	1.1543615	-0.02227708	-0.247023	-0.6452811	-0.189553
$\rho = -0.7$	$n = 20$	0.0198980	2.8497332	-0.793358	-3.253685	-0.03003693	-0.375976	-0.5037535	-0.266500
$\rho = -0.8$	$n = 20$	-0.0343116	3.9350142	4.8726963	2.7805917	-0.03778680	-0.263819	-0.1993139	-0.615747
$\rho = -0.9$	$n = 20$	-0.01420174	-0.0650177	-1.8374753	2.3004120	-0.04989866	-0.275037	-0.2337464	-0.202488
$\rho = 0.6$	$n = 20$	-0.01640387	5.4329681	-6.7288978	3.0954762	-0.03626540	-0.094617	-0.1589123	-0.602683
$\rho = 0.7$	$n = 20$	0.02644869	2.5531605	-5.2166870	-4.4233840	-0.02955828	-0.326028	-0.3707621	-0.349693
$\rho = 0.8$	$n = 20$	-0.04054753	-1.5005133	2.5486063	-1.1191991	-0.01370007	-0.126850	-0.2656314	-0.427174
$\rho = 0.9$	$n = 20$	-0.01939630	-0.9593810	-2.8404130	-3.340925	-0.017815376	-0.17193038	-0.40459550	-0.1772823
$\rho = 0$	$n = 50$	0.00298456	-5.8434270	0.2869216	3.288843	-0.007150456	-0.12025962	-0.08929989	-0.2608962
$\rho = 0.1$	$n = 50$	0.00789854	1.0114090	-4.3630410	-4.640241	-0.010819022	-0.19310722	-0.19158757	-0.2017775
$\rho = 0.5$	$n = 50$	-0.00125253	-0.6371005	0.2166825	1.811025	-0.004735861	-0.14507701	-0.29706271	-0.2156634
$\rho = -0.6$	$n = 50$	0.01486170	9.4145343	2.8445659	-2.7234098	-0.01252076	-0.144886	-0.3027941	-0.415397
$\rho = -0.7$	$n = 50$	-0.01275877	-0.2220834	5.7885396	2.5054918	-0.00992939	-0.198309	-0.3409117	-0.306407
$\rho = -0.8$	$n = 50$	0.000233737	5.4469900	-3.1137098	-0.2303661	-0.00889596	-0.140053	-0.3913411	-0.298901
$\rho = -0.9$	$n = 50$	0.017368076	9.8961940	2.5909520	-4.2798310	-0.02451521	-0.389873	-0.3758256	-0.685057
$\rho = 0.6$	$n = 50$	0.013979013	0.0620033	4.8827649	-3.4477402	-0.01908500	-0.134481	-0.3742702	-0.713126
$\rho = 0.7$	$n = 50$	-0.01402172	-3.2895288	3.0341476	-0.9732209	-0.00840182	-0.148112	-0.2274724	-0.674504
$\rho = 0.8$	$n = 50$	0.007001837	3.9352072	-1.0904178	-4.6526825	-0.02386070	-0.438273	-0.6070160	-0.972454
$\rho = 0.9$	$n = 50$	-0.00396060	3.5141000	-0.2698870	-4.172417	-0.005800989	-0.26190869	-0.59327486	-0.4316256
$\rho = 0$	$n = 100$	-0.00287570	-7.5367030	1.8760920	-2.626299	-0.004402110	-0.43808933	-0.20776111	-0.4352396
$\rho = 0.1$	$n = 100$	0.00324462	-4.9026360	-3.3472960	-9.031408	-0.004411829	-0.07858307	-0.15207149	-0.3284364
$\rho = 0.5$	$n = 100$	0.00361758	-1.0253544	-0.1114111	2.711871	-0.003958998	-0.10190930	-0.13222776	-0.3295281
$\rho = -0.6$	$n = 100$	-0.00060954	-4.1424540	-0.7635251	0.8547249	-0.00392747	-0.137777	-0.2533357	-0.278660
$\rho = -0.7$	$n = 100$	-0.00132423	-3.0083848	16.4688326	7.6957609	-0.00411840	-0.152547	-0.0949271	-0.285373
$\rho = -0.8$	$n = 100$	0.001734537	-0.0832930	1.0736143	-6.1842498	-0.00620104	-0.057235	-0.2458801	-0.409020
$\rho = -0.9$	$n = 100$	0.000893189	-0.4350482	-0.6992665	11.8616360	-0.00558961	-0.223604	-0.4296216	-0.679433
$\rho = 0.6$	$n = 100$	0.000146459	3.3384957	-9.0879934	8.3319637	-0.00448844	-0.144268	-0.3365380	-0.682358
$\rho = 0.7$	$n = 100$	-0.00392688	-6.4320975	3.0857122	3.4574433	-0.00486443	-0.095886	-0.7266765	-0.952051
$\rho = 0.8$	$n = 100$	0.00540829	-3.6177570	8.3285112	-8.5739127	-0.86712721	-0.856939	-0.3428424	-0.452017
$\rho = 0.9$	$n = 100$	0.00042920	1.3378360	-16.345072	14.851727	-0.002895430	-0.13172128	-0.21874960	-0.2117971
$\overline{\beta}$		0.00512690	-0.0895417	-0.0323719	-0.0481345	-0.04188984	-0.231538	-0.3196832	-0.415857

Dalam Tabel 3 terlihat bahwa nilai efisiensi bias β_0 yang dihasilkan menunjukkan bahwa nilai metode *Jackknife* lebih kecil daripada metode *Bootstrap* dengan nilai rata-rata efisiensinya sebesar 0,00512690. Tetapi untuk nilai efisiensi standar deviasi β_0 yang dihasilkan menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan nilai rata-rata efisiensi standar deviasinya sebesar -0,04288984. Nilai efisiensi yang dihasilkan oleh bias β_1 menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan rata-rata efisiensi biasnya sebesar -0.0895417 dan untuk nilai efisiensi yang dihasilkan oleh standar deviasi β_1 juga menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan rata-rata efisiensi standar deviasinya sebesar -0.231538. Rata-rata nilai efisiensi yang dihasilkan oleh bias β_2 sebesar -0.0323719 hal ini menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* untuk bias β_2. Sedangkan untuk standar deviasi β_2 yang dihasilkannya juga menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan nilai rata-rata efisiensi standar deviasinya sebesar -0.3196832. Nilai efisiensi yang dihasilkan oleh bias β_3 menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan rata-rata efisiensi biasnya sebesar -0.0481345 dan untuk nilai efisiensi yang dihasilkan oleh standar deviasi β_3 juga menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* lebih kecil daripada metode *Jackknife* dengan rata-rata efisiensi standar deviasinya sebesar -0.415857. Dari hasil bias $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 dan standar deviasi $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa nilai rata-rata bias dan standar deviasi yang dihasilkan bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa metode *Bootstrap* merupakan metode yang efisien dalam menduga koefisien regresi ketika terjadi multikolinearitas dibandingkan dengan metode *Jackknife*.

PENUTUP

Berdasarkan hasil simulasi dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa metode *Bootstrap* merupakan metode yang paling efisien dibandingkan metode *Jackknife* dalam berbagai kondisi data. Hal ini didukung dengan kecilnya tingkat kesalahan yang dihasilkan serta tingkat keakuratan yang tinggi dari metode *Bootstrap* dalam menduga koefisien regresi ketika terjadi multikolinearitas. Metode *Bootstrap* menghasilkan nilai bias yang lebih kecil dibandingkan dengan metode *Jackknife*. Hal ini berarti koefisien-koefisien nilai penduga dengan menggunakan metode *Bootstrap* lebih memusat diseputar nilai-nilai parameter yang sedang diduga dibandingkan dengan menggunakan metode *Jackknife*. Metode *Bootstrap* juga menghasilkan nilai standar deviasi yang lebih kecil dibandingkan dengan metode *Jackknife*. Ini berarti sebaran data dari penduga dengan menggunakan metode *Bootstrap* lebih kecil dibandingkan dengan sebaran data dari penduga yang menggunakan metode *Jackknife* sehingga metode *Bootstrap* lebih baik dibandingkan dengan metode *Jackknife*. Dan metode *Bootstrap* bisa digunakan untuk semua kondisi data. Hal ini ditunjukkan berdasarkan nilai bias dan standar deviasi dari metode *Bootstrap* yang tidak terpengaruh oleh tingkat multikolinearitas untuk semua kondisi data. Besarnya nilai rata-rata efisiensi dari bias adalah β_0= 0.00512690, β_1= -0.0895417, β_2= -0.0323719, β_3 = -0.0481345, dan untuk nilai rata-rata efisiensi dari standar deviasi adalah β_0= -0,04288984, β_1= -0.231538, β_2= -0.3196832, β_3= -0.415857.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Efron B, dan Tibshirani R.J. *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall; 1983.

[2]. Sprent P. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. New York: Chapman & Hall; 1989.

[3]. Efron B. *The Jackknife, The Bootstrap and Other Resampling Plans*. Philadelphia: Siam; 1982.

[4]. Gujarati D. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Erlangga; 1999.

[5]. Sahinler S, dan Topuz D. Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithm For Estimation of Regression Parameters. *Journal of Applied Quantitative Methods*. 2007; 2(2):188-199.

RYAN ISKANDAR : FMIPA UNTAN, Pontianak, rypu0908@gmail.com
MUHLASAH NOVITASARI MARA : FMIPA UNTAN, Pontianak, novee_mara@yahoo.co.id
NEVA SATYAHADEWI : FMIPA UNTAN, Pontianak, neva_s04@yahoo.co.id